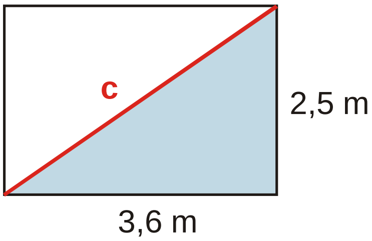
2.8.23 Využití Pythagorovy věty II

Předpoklady: 020822

Př. 1: Jaká je základní rada při řešení příkladů s využitím Pythagorovy věty.

Základní rada pro řešení všech příkladů směřujících k Pythagorově větě: Nakreslíme si obrázek za pokusíme se v něm najít pravoúhlý trojúhelník.

Př. 2: Urči délku úhlopříčky obdélníku o délce stran 2,5 m a 3,6 m.



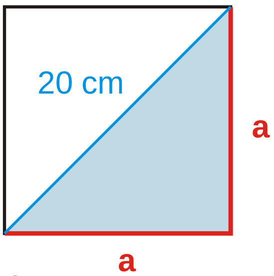
Úhlopříčka dělí obdélník na dva stejné pravoúhlé trojúhelníky, ve kterých hraje roli přepony.

$c^2 = a^2 + b^2 \qquad / \sqrt{\ }$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2,5^2 + 3,6^2}\ \text{m} \doteq 4,4\,\text{m}$

Úhlopříčka obdélníku má délku 4,4 m.

Př. 3: Jakou délku musí mít strany čtverce, aby jeho úhlopříčka měla délku 20 cm?



Úhlopříčka dělí čtverec na dva stejné pravoúhlé trojúhelníky, ve kterých hraje roli přepony.

$c^2 = a^2 + a^2$

$c^2 = 2a^2 \qquad / : 2$

$\frac{c^2}{2} = a^2 \qquad / \sqrt{\ }$

$a = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \sqrt{\frac{20^2}{2}}\ \text{cm} = \sqrt{\frac{400}{2}}\ \text{cm} = \sqrt{200}\ \text{cm} = 10\sqrt{2}\ \text{cm} \doteq 14,1\,\text{cm}$

Přeponu o délce 20 cm má čtverec o straně $10\sqrt{2}\ \text{cm} \doteq 14,1\,\text{cm}$.

Př. 4: Zavazadlový prostor automobilu má přibližně tvar kvádru o stranách 1,5 m x 1 m x 0,5 m (šířka x hloubka x výška). Jakou nejdelší úzkou tyč je možné položit na dno? Jakou nejdelší úzkou tyč je možné do zavazadlového prostoru naložit?

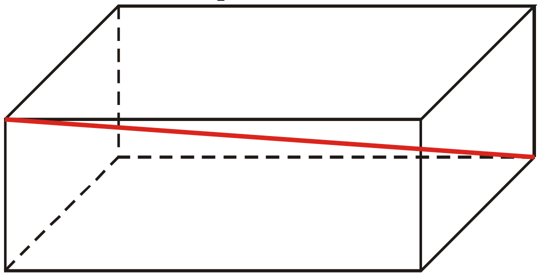
Nejdelší tyč, která může ležet na dně, bude mít stejnou délku jako úhlopříčka dna zavazadlového prostoru.

$c^2 = a^2 + b^2 \qquad / \sqrt{\ }$

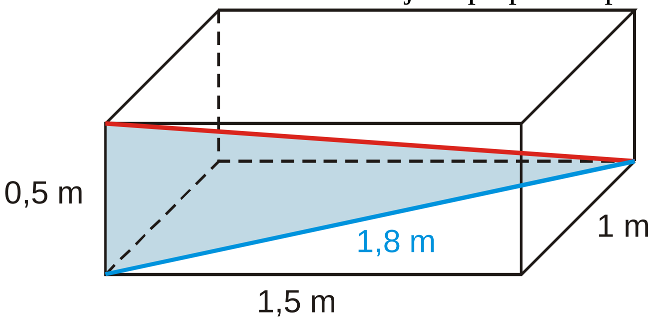
$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1{,}5^2 + 1^2}\ \text{m} \doteq 1{,}8\,\text{m}$

Nejdelší tyč, kterou můžeme položit na dno, může mít délku 1,8 m.

Do zavazadlového prostoru můžeme umístit ještě delší tyč, pokud ji zašprajcujeme z dolního zadního rohu do předního horního rohu.



I tuto vzdálenost můžeme určit jako přeponu v pravoúhlém trojúhelníku.

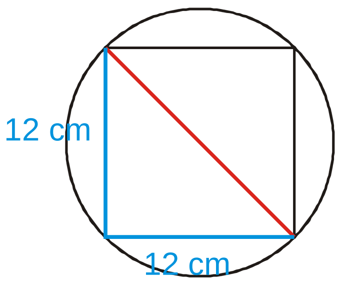


$c^2 = a^2 + b^2 \qquad / \sqrt{\ }$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1{,}8^2 + 0{,}5^2}\ \text{m} \doteq 1{,}9\,\text{m}$

Nejdelší tyč, kterou můžeme do zavazadlového prostoru umístit, může mít délku 1,9 m.

Př. 5: Jaký nejmenší průměr musí mít kmen smrku, aby z něj bylo možné vyříznout čtvercový trám 12 x 12 cm?



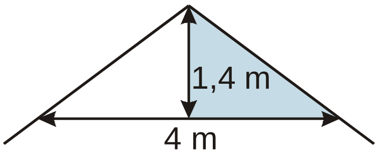
Minimální průměr kmene je roven úhlopříčce čtverce, který tvoří průřez trámu.

$c^2 = a^2 + b^2 \qquad / \sqrt{\ }$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{12^2 + 12^2}\ \text{cm} \doteq 17\ \text{cm}$

Kmen smrku musím mít průměr alespoň 17 cm (bez kůry).

Př. 6: Andrej zastřešuje zahradní domek o půdorysu 5 m x 4 m klasickou sedlovou střechou. Hřeben má být rovnoběžný s delší stranou domku a má být o 1,4 m nad horní plochou bočních stěn (takzvaným věncem). Jak dlouhé musí být šikmé trámy, pokud mají přesahovat stěny o pětinu své délky? Jakou plochu bude střecha mít, pokud má střecha přesahovat půdorys domku v obou čelech o 0,5 m?



Přeponu v modrém pravoúhlém trojúhelníku o odvěsnách 2 m a 1,4 m tvoří část trámu:

$c^2 = a^2 + b^2 \qquad / \sqrt{\ }$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 1{,}4^2}\ \text{m} \doteq 2{,}44\ \text{m}$

Trámy přesahují spočtenou vzdálenost o šestinu $\Rightarrow$ mají velikosti $\frac{6}{5}$ spočtené délky.

$\frac{6}{5} \cdot 2{,}44\ \text{m} \doteq 2{,}93\ \text{m}$

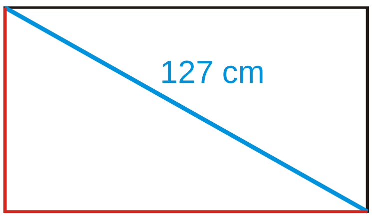
Střechu tvoří dva obdélníky o rozměrech:

- $5 + 0{,}5 + 0{,}5\ \text{m} = 6\ \text{m}$ (půl metrové přesahy na obou čelech střechy),
- 2,93 (délka trámu).

$S = 2ab = 2 \cdot 6 \cdot 2{,}93\ \text{m}^2 = 35{,}16\ \text{m}^2$

Šikmé trámy musí mít délku 2,93 cm, plocha celé střechy bude $35\ \text{m}^2$.

Př. 7: Televize má úhlopříčku 127 cm, poměr stran 16:9 a šířku rámečku okolo obrazovky 3 cm. Jaké jsou její vnější rozměry?



Ve vyznačeném pravoúhlém trojúhelníku známe přeponu, ale ani jednu odvěsnu.
Víme, že poměr odvěsen je $16:9$ $\Rightarrow$ delší odvěsna má 16 dílů, kratší 9 dílů $\Rightarrow$ označíme se délku dílu x $\Rightarrow$

- delší odvěsna: $a = 16x$,
- kratší odvěsna: $b = 9x$.

Pythagorova věta: $a^2 + b^2 = c^2$.

Dosadíme, co známe: $(16x)^2 + (9x)^2 = 127^2$.

$16^2 x^2 + 9^2 x^2 = 16129$.

$256x^2 + 81x^2 = 16129$

$337x^2 = 16129 \qquad / : 337$

$x^2 = 16129 : 337 \doteq 47,9 \qquad / \sqrt{}$

$x \doteq 6,9 \text{ cm}$

Dopočteme délky stran:

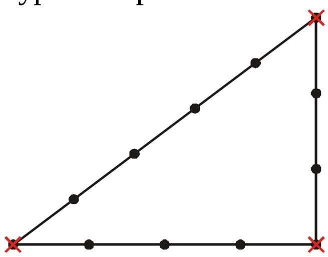
- delší odvěsna: $a = 16x = 16 \cdot 6,9 \text{ cm} = 110,4 \text{ cm}$,
- kratší odvěsna: $b = 9x = 9 \cdot 6,9 \text{ cm} = 62,1 \text{ cm}$.

V obou rozměrech je televize o 6 cm větší (na obou stranách je rámeček).

Televize má rozměry 116,4 cm x 68,1 cm.

Př. 8: K vytyčování pravého úhlu se používá provázek s uzlíky navázanými v pravidelných vzdálenostech (vzdálenost dvou uzlíků není důležitá, podstatné je, aby každá dvojice uzlíků od sebe byla stejně daleko). Navrhni postup, jak pomocí takového provázku pravý úhel odměřit.

Některé pravoúhlé trojúhelníky mají celočíselné délky všech stran, například 3, 4, 5 $\Rightarrow$ můžeme pomocí provázku takový trojúhelník sestrojit, pokud bude na provázku 13 rovnoměrně vzdálených uzlíků (12 vyznačených úseků).
Svážeme provázek dokola, napneme mezi dva body část lana o délce 5 dílků, rukou chytíme uzlík, vzdálený od jednoho připevněného konce 3 uzlíky, od druhého 4 uzlíky. Provázek vypneme, čímž zkonstruujeme pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem ve vrcholu, ze kterého vypínáme provázek. Ve třech lidech je možné konstruovat trojúhelník bez připevnění.



Shrnutí: Při řešení příkladů na Pythagorovu větu si nakreslíme obrázek za pokusíme se v něm najít pravoúhlý trojúhelník